1 La fuerza de Lorentz

1.1 Definición del campo magnético

Dr. Gustavo A Pérez M.

1).- Dado un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{B}$ la fuerza sobre una partícula que se mueve con velocidad $\overrightarrow{v}$ es

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \wedge \vec{B}\ ) \quad (1)$$

esta ecuación puede usarse en el caso que no hay campo eléctrico como la definición del campo magnético así:

$\overrightarrow{F}= q(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$

esta ecuación se resuelve usando la ecuación (1-15) del Reitz - Milford y Christy

que dice que si tenemos:

$\overrightarrow{C}=\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{X}$

donde $\overrightarrow{X}$ es el vector de incognitas

$\overrightarrow{X}= \frac{\left(\overrightarrow{C}\Lambda\overrightarrow{A}\right)}{\|A\|^2} + k\ \overrightarrow{A}$

donde k es una constante arbitraria.

Para determinar entonces el campo magnético necesitamos hacer dos medidas de la fuerza para dos velocidades independientes y de preferencia perpendiculares.

Sean $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ las velocidades y $\overrightarrow{F_1}$ y $\overrightarrow{F_2}$ las fuerzas respectivas:

$\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{F_1}\ \Lambda\ \overrightarrow{v_1}}{q{v_1}^2} + k_1\ \overrightarrow{v_1}$

$\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{F_2}\ \Lambda\ \overrightarrow{v_2}}{q{v_2}^2} + k_2\ \overrightarrow{v_2}$

multiplicando por $\overrightarrow{v_1}$ ambas ecuaciones y usando que $\overrightarrow{v_1} \bullet \overrightarrow{v_2} = 0$

$\overrightarrow{v_1} \bullet \overrightarrow{B} = k_1\ v_1^2$

$\overrightarrow{v_1} \bullet\ \overrightarrow{B}\ = \overrightarrow{v_1} \bullet \frac{\left(\overrightarrow{F_2}\ \Lambda\ \overrightarrow{v_2}\right)}{qv_2^2}$

de esta forma

$k_1 = \frac{\overrightarrow{v_1}\bullet \left(\overrightarrow{F_2}\ \Lambda\ \overrightarrow{\nu}_2\right)}{qv_1^2 v_2^2}.$

y la solución para el campo magnético hechas las dos medidas de fuerza a velocidades perpendiculares $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ es:

$\overrightarrow{B}\ = \frac{\overrightarrow{F_1}\Lambda\overrightarrow{v_1}}{qv_1^2} + \frac{\overrightarrow{v_1} \bullet \left(\overrightarrow{F_2}\ \Lambda\ \overrightarrow{v_2}\right)}{qv_2^2 v_1^2}\ \overrightarrow{v}_1$

2 Las ecuaciones del movimiento en la fuerza de Lorentz

La ecuación del movimiento de la fuerza de Lorentz en general es complicada, la ecuación no relativistica es:
$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\,\vec{E} + q\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right)$
esta ecuación en general tiene componentes acopladas del tipo $v_x = f\left(v_y\right)$ etc.

2.0.1 Las ecuaciones generales

La fuerza de Lorentz se separa en tres componentes ; en coordenadas cartesianas se escriben como:
$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m}[E_x + v_y B_z - v_z B_y]$
$\frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m}[E_y + v_z B_x - v_x B_z]$
$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m}[E_z + v_x B_y - v_y B_x]$
Estas ecuaciones tambien pueden escribirse en forma matricial de la siguiente
La matriz de campo magnético:

$$\mathrm{M}_B = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Esta se dice es la representación de un seudo-vector como un tensor antisimetrico de segunda orden.
El vector velocidad $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, v_z)$
así siendo:
$\overrightarrow{F} = qM_B\overrightarrow{v}$
El campo electrico no se representa como una matriz 3x3 , pero el campo elctromagnéntico puede representarse por un tensor anti-simetrico de segundo orden 4x4, simbolicamente:

$$\mathrm{F}^{\mu,\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\overrightarrow{E} \\ \overrightarrow{E} & M_B \end{bmatrix}$$

Note que las tres ecuaciones se reducen a una sola con sus permutaciones cíclicas x$\rightarrow y \rightarrow z$; este sistema constituye un sistema de ecuaciones diferenciales acopaldas, que se desacopla derivando y sustituyendo las derivadas de la velocidad por sus propias ecuaciones. Una vez que se obtiene la solución de la ecuación diferencial de tercera orden las coordenadas se obtienen como:

x(t)=x$_0 + \int_{t_0}^{t} v_x(t')dt'$
y(t)=y$_0 + \int_{t_0}^{t} v_y(t')dt'$
x(t)=z$_0 + \int_{t_0}^{t} v_z(t')dt'$

En la solución del sistema general hay que considerar las leyes de conservacion de energía y el momento angular.

$\frac{mv^2}{2} + U(\overrightarrow{r}) = Cte$

$\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F}$

Esta última ley adquiere importancia en sistemas con simetría cilindrica como el magnetrón en este caso:

$\overrightarrow{L} = m\rho^2 \frac{d\phi}{dt} \hat{z}$

En el caso en que los campos eléctrico y magnético son estáticos existe una velocidad privilegiada con la cual la partícula que entra a la region de interacción no sufre fuerza o sea :

$\overrightarrow{E}_\perp + \overrightarrow{v}_D \wedge \overrightarrow{B} = 0$ o sea que despejando $\overrightarrow{v}_D = \frac{\overrightarrow{E}_\perp \wedge \overrightarrow{B}}{B^2}$

He aqui algunos casos sencillos:

2.1 El movimiento circular:

Suponga que solo existe campo magnético

$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = q\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right)$

luego si el movimiento es circular

$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\omega}\ \Lambda\ \overrightarrow{v}$ (2)

luego:

$m\left(\overrightarrow{\omega}\ \Lambda\ \overrightarrow{v}\right) = q\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right)$

o sea que

$\left(\overrightarrow{\omega}\ \Lambda\ \overrightarrow{v}\right) = -\frac{q}{m}\left(\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{v}\right)$

ó:

$\overrightarrow{\omega} = -\frac{q}{m}\overrightarrow{B}$ (3)

$\overrightarrow{\omega} = -\frac{q}{m}\overrightarrow{B} + \lambda\overrightarrow{v}$ es la solución más general .

A esta ecuación se acostumbra a llamar
frecuencia de Ciclotrón.

2.2 Campos eléctricos y magnéticos constantes y perpendiculares

2.2.1 (Tubo de rayos catódicos).

Sea $\overrightarrow{E} = E_0 \hat{y}$, $B = B_0 \hat{z}$

supongamos que la velocidad esta en el plano (x, y)

(Explique como podemos garantizar v_z = constante)

$\overrightarrow{v} = (v_x, v_y)$

de esta forma la ecuación

$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} + q\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right)$

se escribe como:
$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} v_y B_0$ (4)
$\frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m} (E_0 - v_x B_0)$ (5)
para desacoplar estas ecuaciones es necesario derivar otra vez así:
$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \frac{q}{m} B_0^2 v_x = \frac{q^2}{m^2} E_0 B_0$
que es la ecuación de un oscilador armónico forzado.
$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \frac{q^2}{m^2} B_0^2 v_y . = 0$

3 PROBLEMAS

3.1 Problema 1.

Integre la ecuación (4) y encuentre
$v_x = \frac{q}{m} B_0 y$

3.2 Problema 2

Integre la ecuación (5) y encuentre
$v_y = \frac{q}{m} E_0 t - \frac{q}{m} B_0 x$

3.3 Problema 3

De la ecuación (1) demuestre que la ecuación de potencia se escribe como:
$\frac{1}{2} m \frac{dv^2}{dt} = q \overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{v}$
o sea que
$v^2 = \frac{2q}{m} E_0 y$

3.4 Problema 4

Use los resultados anteriores para demostrar que:
$v_y = \sqrt{(v^2 - v_x^2)} = \sqrt{\frac{q}{m}} \left[2E_0 y - \frac{q}{m} B_0^2 y^2 \right]^{\frac{1}{2}}$

3.5 Problema 5

Muestre que si h es la distancia vertical entre las placas la partícula no llegará a la placa superior si:
$E_0 = \frac{1}{2} \frac{q}{m} B_0 h.$

3.6 Problema 6

Estime el efecto del campo magnético terrestre sobre el haz de electrones de un cinescopio de TV. Supóngase que el voltaje del acelerador es de 20,000 V. Cálculese la desviación aproximada del haz sobre una distancia de 0.4 m desde el cañon de electrones hasta la pantalla por la acción de un campo transversal de 0.5x$10^{-4} T$ (Comparable con la magnitud del campo terrestre), suponiendo que no existan otros campos deflectores. ¿Es significativa esta desviación?

Se debe suponer que los electrones adquieren rapidamente el modulo de su velocidad final y comparar el resultado en relación a los pixels del cinescopio y no a su tamaño total

Numero de portadores en un conductor.

El número de portadores en un conductor depende de dos cosas: 1) El número de electrones cedidos por átomo el número de átomos por unidad de volumen.

2) El número de átomos presentes en el material.

Si $N_a = 6.023x10^{23}$ es el número de Avogadro el número de átomos se encuentra así:

n=N/V=$\frac{N_a D}{P_A}$ donde D es la densidad y P_A es el peso átomico.

Cobre

Densidad 8.96

Peso átomico 63.5

n=$8.4x10^{22}$ atomos/cm^3

Plata

Densidad 10.5

Peso átomico=107.87

n=$5.9x10^{22}$

Oro

Densidad 19.3

Peso átomico 196.96

n=$5.9x10^{22}$

Recomendaciones: Repase de su libro de físisca general:

Segunda ley de Newton

Movimiento circular

Momento angular

Haga los problemas del 1 al 9 del apendice A del Wangsness

Algunos cálculos heuristicos de campos eléctricos y magnéticos usando el principio de relatividad "latus sense" pero "estne tutum"?

Considere una linea de densidad lineal de carga λ de forma que $\lambda L = q = \rho LA$ o sea que $\lambda = \rho A$. Si estamos en un sistema de referencia que está en reposo en relación a la linea (el referencial propio de la linea) podemos decir que existe un campo eléctrico producido por la linea que segun el Wangness vale por W-4-11 $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}$.

Por otra parte si nos encontramos en un sistema de referencia que se mueve con velocidad v en relación a la linea infinita de carga, veremos una corriente $I = jA = \rho vA = \lambda v$ así siendo, calculamos el campo magnético usando la ecuación W-15-18 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$.

Si usamos el principio de relatividad latus sense o sea que los sucesos físicos deben ser los mismos en todos los sistemas de referencia, lo que tiene realidad física es la fuerza de forma que las fuerzas deben ser equivalentes en los diferentes sistemas de referencia (de argumentos en contra a esta hipotesis) de la fuerza de Lorentz para los dos sistemas de referencia obtenemos:

$F = qE = qvB$ o sea que la ley de transformación de los campos es $\frac{E}{B} = v$.

Por otro lado sabemos que la velocidad de la luz se escribe como $c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$ asi que dividiendo $\frac{E}{B}$en nuestro ejemplo de la linea obtenemos:

$\frac{E}{B} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 v} = \frac{c^2}{v}$ lo que en el caso extremanente relativistico da el mismo resultado que para una onda electromagnética $\frac{E}{B} = c$

Si Ud tiene interes en este tema puede consultar el libro Electrodinámica Clásica de John David Jackson 2 edición cap 11 cerca de la fórmula de transformación de campos 11.149 y ver que para estne tutum? (es seguro) la repuesta es no, hay que tener en cuenta cierta restricciones vea problema 11.11 y 11.12 de forma que un campo puramente electrostático en un sistema de coordenadas no puede transformarse en en un campo puramente magnetostático en otro sistema. Tenga cuidado que el libro está a un nivel más avanzado que el nuestro.