

Problema 14 - 11

Un disco dielectrico circular de radio a posee una densidad superficial de carga σ . Se le hace girar a velocidad constante ω alrededor de un eje que es normal a la superficie del disco y pasa por su centro. Suponer que la distribucion de carga no se altera por la rotacion. Encontrar \vec{B} en un punto arbitrario sobre el eje de rotacion. Cual es el valor de \vec{B} en el centro del disco?

Solucion :

$$\vec{K}' = \sigma \rho' \omega \hat{\phi}'; \quad \vec{r} = z \hat{z}; \quad \vec{r}' = \rho' \hat{\rho}'; \quad \vec{R} = z \hat{z} - \rho' \hat{\rho}'; \quad R^3 = (z^2 + \rho'^2)^{3/2}; \quad ds' = \rho' d\rho' d\phi'.$$

$$\vec{K}' \times \vec{R} = z\sigma\rho'\omega \left(\hat{\phi}' \times \hat{z} \right) - \sigma\rho'^2\omega \left(\hat{\phi}' \times \hat{\rho}' \right)$$

$$= z\sigma\rho'\omega \hat{\rho}' + \sigma\rho'^2\omega \hat{z}.$$

$$\text{Asi } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K}' \times \vec{R} ds'}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{(z\sigma\rho'\omega \hat{\rho}' + \sigma\rho'^2\omega \hat{z}) \rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} d\rho' d\phi'$$

la componente en $\hat{\rho}'$ se anula ya que $\int_0^{2\pi} \hat{\rho}' d\phi' = 0$.

$$\text{por tanto } \vec{B} = \frac{\mu_0 \omega \sigma \hat{z}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho'^3}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} d\rho' d\phi'.$$

$$= \frac{\mu_0 \omega \sigma \hat{z}}{2} \int_0^a \frac{\rho'^3}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} d\rho'$$

$$= \frac{\mu_0 \omega \sigma \hat{z}}{2} \left(\sqrt{a^2 + z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{a^2 + z^2}} - |z| - \frac{z^2}{|z|} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 \omega \sigma \hat{z}}{2} \left(\frac{a^2 + 2z^2}{\sqrt{a^2 + z^2}} - 2|z| \right).$$

para el centro del disco $z = 0$

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 \omega \sigma a \hat{z}}{2}.$$

Problema 15-1

Un circulo de radio a descansa sobre el plano xy con su centro en el origen. Encontrar el angulo solido Ω subtendido por este circulo en un punto del eje z positivo.

Solucion :

$$d\Omega = \frac{\vec{R} \cdot d\vec{s}}{R^3}; \quad \vec{R} = \rho \hat{\rho} - z \hat{z}; \quad d\vec{s} = -\rho d\rho d\phi \hat{z}; \quad \vec{R} \cdot d\vec{s} = \rho z d\rho d\phi; \quad R^3 = (\rho^2 + z^2)^{3/2};$$

$$\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} d\rho d\phi = 2\pi \left(1 - \frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \right)$$

FS-415 PRIMER PARCIAL

Problema #1

Supongase que se producen partículas cargadas de velocidad despreciable desde una de las placas de un condensador de placas paralelas cuya separación entre las placas es d . Existe una diferencia de potencial $\Delta\phi$ entre las placas y una inducción uniforme \vec{B} que es paralela a ellas. Demuestre que no habrá corriente entre las placas si $\Delta\phi$ es menor que $\frac{qB^2 d^2}{2m}$.

Solución:

usando el problema #4 del folleto "Fuerza de Lorentz"

$$v_y = \sqrt{\frac{q}{m} (2Ey - \frac{q}{m} B^2 y^2)} ; \text{ en nuestro caso } E = \frac{\Delta\phi}{d}, \text{ y } y = d;$$

$$2\Delta\phi < \frac{q}{m} B^2 d^2 \quad \text{y entonces} \quad \Delta\phi < \frac{q}{2m} B^2 d^2.$$

Problema#2

Considerense los dos circuitos que se muestran en la figura. Todas las corrientes se encuentran en el mismo plano. C' es infinitamente largo. Los lados del rectángulo de longitud b son paralelos a C' . Encontrar la fuerza total sobre C . ¿Es esta de atracción o de repulsión?

Solución :

La fuerza por unidad de longitud entre corrientes paralelas es : $\frac{d\vec{F}}{dz} =$

$$\frac{\mu_0 I^2}{2\pi\rho} \hat{\rho} \text{ y para corrientes}$$

antiparalelas :

$$\frac{d\vec{F}}{dz} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi\rho} \hat{\rho} \text{ donde } \hat{\rho} \text{ es el}$$

vector unitario horizontal que apunta de C' a C .

En este problema hay una corriente paralela de longitud b a una distancia d de C' , y una corriente antiparalela de longitud b a una distancia de $d + a$ de C' . Las partes de arriba

y de abajo del circuito C no contribuyen a la fuerza total debido a que los elementos de corriente en estas partes son perpendiculares al circuito C' . Así

$$F_T = -\frac{\mu_0 I^2 b}{2\pi d} \hat{\rho} + \frac{\mu_0 I^2 b}{2\pi(d+a)} \hat{\rho} = -\frac{\mu_0 I^2 b \hat{\rho}}{2\pi} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right) = -\frac{\mu_0 I^2 b a}{2\pi d (d+a)} \hat{\rho}$$

La fuerza es de atracción debido a la presencia del signo negativo.

Problema #3

La corriente que se ilustra en la figura sigue la dirección de un arco de círculo sobre el plano xy con centro de curvatura en el origen. Encontrar \vec{B} en cualquier punto del eje z .

Solución :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{c'} \frac{I' d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3};$$

$$\vec{r} = z \hat{z}; \vec{r}' = a \hat{\rho}'; \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = z \hat{z} - a \hat{\rho}'; d\vec{l} = a d\phi' \hat{\phi}';$$

$$I' d\vec{l} \times \vec{R} = I' a d\phi' (z \hat{\rho}' + a \hat{z}); R^3 = (z^2 + a^2)^{3/2};$$

$$\text{Asi } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{I' a d\phi' (z \hat{\rho}' + a \hat{z})}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I' a}{4\pi (z^2 + a^2)^{3/2}} \left[\int_{-\alpha}^{\alpha} z \hat{\rho}' d\phi' + \int_{-\alpha}^{\alpha} a \hat{z} d\phi' \right]$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} z \hat{\rho}' d\phi' = z \int_{-\alpha}^{\alpha} (\cos\phi' \hat{x} + \text{sen}\phi' \hat{y}) d\phi' = 2 z \text{sen}\alpha \hat{x};$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} a \hat{z} d\phi' = 2 \alpha a \hat{z};$$

$$\text{Por tanto } \vec{B} = \frac{\mu_0 I' a}{2\pi (z^2 + a^2)^{3/2}} [z \text{sen}\alpha \hat{x} + \alpha a \hat{z}].$$

Poblema #4

Considere un haz cilindrico muy largo de particulas

cargadas. El haz tiene una seccion circular de radio a ,

una densidad de carga uniforme ρ_{ch} y las particulas se mantienen

a la misma velocidad constante \vec{v} . Encontrar \vec{B} dentro y fuera del

haz y expresar los resultados en funcion de las cantidades dadas.

Solucion:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc};$$

si se hace coincidir la direccion \vec{v} con \hat{z} y escogiendo como trayectorias de integracion a circunferencias centradas en el eje z tenemos que:

$$2\pi\rho B = \mu_0 I_{enc}; \text{ ademas } j = \rho_{ch} v;$$

$$\text{asi si } \rho \leq a, I_{enc} = \pi\rho^2 v\rho_{ch}$$

$$\text{y entonces } 2\pi\rho B = \mu_0 \pi\rho^2 v\rho_{ch}$$

$$\text{y por tanto } B = \frac{\mu_0 \rho_{ch} v}{2} \rho, \text{ o en forma de vector } \vec{B} = \frac{\mu_0 \rho_{ch} v}{2} \rho \hat{\phi}.$$

$$\text{Si } \rho > a, I_{enc} = \pi a^2 v\rho_{ch}$$

$$\text{entonces } 2\pi\rho B = \mu_0 \pi a^2 v\rho_{ch}$$

$$\text{y por tanto } B = \frac{\mu_0 a^2 v\rho_{ch}}{2\rho}, \text{ o en forma de vector } \vec{B} = \frac{\mu_0 a^2 v\rho_{ch}}{2\rho} \hat{\phi}.$$