Problema 14 − 11

Un disco dielectrico circular de radio a posee una densidad superficial de carga σ. Se le hace girar a velocidad constante ω alrededor de un eje que es normal a la superficie del disco y pasa por su centro. Suponer que la distribucion de carga no se altera por la rotacion. Encontrar $\vec{B}$ en un punto arbitrario sobre el eje de rotacion. Cual es el valor de $\vec{B}$ en el centro del disco?

Solucion :

$$\vec{K}' = \sigma\rho'\,\omega\,\hat{\phi}';\ \vec{r} = z\,\hat{z};\ \vec{r}' = \rho'\,\hat{\rho}';\ \vec{R} = z\,\hat{z} - \rho'\,\hat{\rho}';\ R^3 = (z^2 + \rho'^2)^{3/2};\ ds' = \rho' d\rho' d\phi'.$$

$$\vec{K}' \times \vec{R} = z\sigma\rho'\omega\left(\hat{\phi}' \times \hat{z}\right) - \sigma\rho'^2\,\omega\left(\hat{\phi}' \times \hat{\rho}'\right)$$

$$= z\sigma\rho'\omega\,\hat{\rho}' + \sigma\rho'^2\,\omega\,\hat{z}.$$

$$\text{Asi } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_S \frac{\vec{K}' \times \vec{R}\, ds'}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_S \frac{\left(z\sigma\rho'\omega\,\hat{\rho}' + \sigma\rho'^2\,\omega\,\hat{z}\right)\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}}\, d\rho'\, d\phi'$$

la componente en $\hat{\rho}'$ se anula ya que $\int_0^{2\pi} \hat{\rho}'\, d\phi' = 0$.

$$\text{por tanto } \vec{B} = \frac{\mu_0\,\omega\sigma\,\hat{z}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\rho'^3}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}}\, d\rho'\, d\phi'.$$

$$= \frac{\mu_0\,\omega\sigma\,\hat{z}}{2}\int_0^a \frac{\rho'^3}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}}\, d\rho'$$

$$= \frac{\mu_0\,\omega\sigma\,\hat{z}}{2}\left(\sqrt{a^2 + z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{a^2 + z^2}} - |z| - \frac{z^2}{|z|}\right)$$

$$= \frac{\mu_0\,\omega\sigma\,\hat{z}}{2}\left(\frac{a^2 + 2z^2}{\sqrt{a^2 + z^2}} - 2|z|\right).$$

para el centro del disco $z = 0$

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0\,\omega\sigma a\,\hat{z}}{2}.$$

Problema 15-1

Un circulo de radio a descansa sobre el plano xy con su centro en el origen. Encontrar el angulo solido Ω subtendido por este circulo en un punto del eje z positivo.

Solucion :

$$d\Omega = \frac{\vec{R} \bullet d\vec{s}}{R^3};\ \vec{R} = \rho\,\hat{\rho} - z\,\hat{z};\ d\vec{s} = -\rho d\rho d\phi\,\hat{z};\ \vec{R} \bullet d\vec{s} = \rho z d\rho d\phi;\ R^3 = (\rho^2 + z^2)^{3/2};$$

$$\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\, d\rho\, d\phi = 2\pi\left(1 - \frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}}\right)$$

FS-415 PRIMER PARCIAL

Problema #1

Supongase que se producen particulas cargadas de velocidad despreciable desde una de las placas de un condensador de placas paralelas cuya separacion entre las placas es d. Existe una diferencia de potencial $\Delta\phi$ entre las placas y una induccion uniforme $\vec{B}$ que es paralela a ellas. Demuestre que no habra corriente entre las placas si $\Delta\phi$ es menor que $\frac{qB^2 d^2}{2m}$.

Solucion:

usando el problema #4 del folleto "Fuerza de Lorentz"

$v_y = \sqrt{\frac{q}{m}}(2Ey - \frac{q}{m}B^2 y^2)$; en nuestro caso $E = \frac{\Delta\phi}{d}$, y y=d;

$2\Delta\phi < \frac{q}{m}B^2 d^2$ y entonces $\Delta\phi < \frac{q}{2m}B^2 d^2$.

Problema#2

Considerense los dos circuitos que se muestran en la figura. Todas las corrientes se encuentran en el mismo plano. C´es infinitamente largo. Los lados del rectangulo de longitud b son paralelos a C´. Encontrar la fuerza total sobre C. ¿Es esta de atraccion o de repulsion?

Solucion :

La fuerza por unidad de longitud entre corrientes paralelas es : $\frac{d\vec{F}}{dz} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi\rho}\hat{\rho}$ y para corrientes antiparalelas :

$$\frac{d\vec{F}}{dz} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi\rho}\hat{\rho}$$ donde $\hat{\rho}$ es el vector unitaio hoizontal que apunta de C´ a C.

En este problema hay una corriente paralela de longitud b a una distancia d de C´, y una corriente antiparalela de longitud b a una distancia de d + a de C´. Las partes de arriba y de abajo del circuito C no contribuyen a la fuerza total debido a que los elementos de corriente en estas partes son perpendiculares al circuito C´. Asi

$$F_T = -\frac{\mu_0 I^2 b}{2\pi d}\hat{\rho} + \frac{\mu_0 I^2 b}{2\pi(d+a)}\hat{\rho} = -\frac{\mu_0 I^2 b\hat{\rho}}{2\pi}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a}\right) = -\frac{\mu_0 I^2 ba}{2\pi d(d+a)}\hat{\rho}$$

La fuerza es de atraccion debido a la presencia del signo negativo.

Problema #3

La corriente que se ilustra en la figura sigue la direccion de un arco de circulo sobre el plano xy con centro de curvatura en el origen. Encontrar $\vec{B}$ en cualquier punto del eje z.

Solucion :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{C'} \frac{I' d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3};$$

$\vec{r} = z\hat{z}$; $\vec{r}\,' = a\hat{\rho}\,'$; $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,' = z\hat{z} - a\hat{\rho}\,'$; $d\vec{l} = a d\phi'\hat{\phi}\,'$;

$I' d\vec{l} \times \vec{R} = I' a d\phi' \left(z\hat{\rho}\,' + a\hat{z}\right)$; $R^3 = (z^2 + a^2)^{3/2}$;

Asi $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{I' a d\phi' \left(z\hat{\rho}\,' + a\hat{z}\right)}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I' a}{4\pi (z^2 + a^2)^{3/2}}\left[\int_{-\alpha}^{\alpha} z\hat{\rho}\,' d\phi' + \int_{-\alpha}^{\alpha} a\hat{z}\, d\phi'\right]$

$\int_{-\alpha}^{\alpha} z\hat{\rho}\,' d\phi' = z\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\cos\phi'\hat{x} + \operatorname{sen}\phi'\hat{y}\right) d\phi' = 2 z \operatorname{sen}\alpha\,\hat{x}$;

$\int_{-\alpha}^{\alpha} a\hat{z}\, d\phi' = 2\alpha a\hat{z}$;

Por tanto $\vec{B} = \frac{\mu_0 I' a}{2\pi (z^2 + a^2)^{3/2}}\left[z \operatorname{sen}\alpha\,\hat{x} + a\alpha\hat{z}\right]$.

Poblema #4

Considere un haz cilindrico muy largo de particulas cargadas.El haz tiene una seccion circular de radio a, una densidad de carga uniforme ρ_{ch} *y* las particulas se mantienen a la misma velocidad constante $\vec{v}$. Encontrar $\vec{B}$ dentro y fuera del haz y expresar los resultados en funcion de las cantidades dadas.

Solucion :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc};$$

si se hace coincidir la direccion $\vec{v}$ con $\hat{z}$ y escogiendo como trayectorias de integracion a circunferencias centradas en el eje z tenemos que :

$2\pi\rho B = \mu_0 I_{enc}$; ademas $j = \rho_{ch} v$;

asi si $\rho \leq a$, $I_{enc} = \pi\rho^2 v\rho_{ch}$

y entonces $2\pi\rho B = \mu_0 \pi\rho^2 v\rho_{ch}$

y por tanto $B = \frac{\mu_0 \rho_{ch} v}{2}\rho$, o en forma de vector $\vec{B} = \frac{\mu_0 \rho_{ch} v}{2}\rho\hat{\phi}$.

Si $\rho > a$, $I_{enc} = \pi a^2 v\rho_{ch}$

entonces $2\pi\rho B = \mu_0 \pi a^2 v\rho_{ch}$

y por tanto $B = \frac{\mu_0 a^2 v\rho_{ch}}{2\rho}$, o en forma de vector $\vec{B} = \frac{\mu_0 a^2 v\rho_{ch}}{2\rho}\hat{\phi}$.