

# *La conducción atmosférica de ondas de radio*

*Dr. Gustavo A. Pérez M  
Coordinador de la sección de física teórica  
Departamento de física UNAH  
gperez@gsun.fisica.unah.hn*

## *Resumen*

*Cuando hablamos de la solución de las ecuaciones de Maxwell, en general se deja para cursos avanzados los desarrollos detallados de los medios materiales. Los modelos materiales de la atmósfera, tales como Drude, Sommerfeld y el modelo de plasmas tenues son conocidos para la atmósfera de la tierra desde los años 30.*

*Con el advenimiento de la exploración robótica de otros cuerpos celestes en especial de Marte la propagación de ondas de radio en plasmas tenues se ha vuelto de nuevo un tema de actualidad y es interesante que los ingenieros eléctricos que sólo estudian este material en los cursos especializados lo conozcan.*

---

## Introducción

En años recientes se le ha dado una gran cantidad de atención a la propagación de ondas electromagnéticas en plasmas. En gran medida el interés en la teoría se ha visto estimulado por su aplicación a los problemas de radio comunicación, radio astronomía y fusión termonuclear controlada. Por ejemplo la teoría se ha usado para explicar la propagación de ondas de radio en la ionósfera, en la atmósfera solar y en muchas otras aplicaciones.

## *Modelo de Drude*

---

Consideremos un medio donde los electrones no están ligados al átomo y no hay fuerza elástica que cause polarización, la ecuación diferencial que rige los electrones es:

$$m \mathbf{v}' + \frac{m}{\tau} \mathbf{v} = -q \mathbf{E}_0$$

```
DSolve[m v'[t] + \frac{m}{\tau} v[t] == -q E_0, v, t]
```

```
{ {v -> Function[{t}, e^{-\frac{t}{\tau}} C[1] - \frac{q \tau E_0}{m} ] } }
```

Donde  $v$  es la velocidad del electrón, la disipación por fricción es  $m/\tau$ . Suponga la densidad de corriente  $\mathbf{J} = -Nq\mathbf{v}$  como:

```
DSolve[J'[t] + \frac{J[t]}{\tau} == \frac{N q^2}{m} E_0, J[t], t]
```

```
{ {J[t] -> \frac{E_0 N q^2 \tau}{m} + e^{-\frac{t}{\tau}} C[1] } }
```

La solución consta de dos partes, la solución transiente que decae en el tiempo  $\tau$  que se denomina tiempo de relajación y una solución particular estacionaria que es la ley de Ohm.

$\mathbf{J} = \frac{N q^2 \tau \mathbf{E}_0}{m}$ , siendo el coeficiente  $\frac{N q^2 \tau}{m}$  la conductividad  $\sigma = \frac{N q^2 \tau}{m}$ . Note

que aparte de los parámetros del electrón como ser carga y masa el único factor relevante es la densidad de electrones disponibles en el plasma.

Supongamos ahora que el campo eléctrico tiene una dependencia armónica  $e^{-i\omega t}$  de forma que la solución estacionaria de la ecuación diferencial de la corriente se escribe como:

$$\text{solve}\left[\left(-i\omega + \frac{1}{\tau}\right) \mathbf{J} == \frac{\sigma}{\tau} \mathbf{E}_0, \mathbf{J}\right]$$

$$\left\{\left\{\mathbf{J} \rightarrow \frac{\mathbf{E}_0 \sigma + i \mathbf{E}_0 \sigma \tau \omega}{1 + \tau^2 \omega^2}\right\}\right\}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\mu \sigma}{1 - i\omega \tau} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t}$$

Esta ecuación tiene una solución de onda plana de la forma:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\kappa z - \omega t}$  donde  $\kappa$  se determina sustituyendo en la ecuación diferencial. Así:

$$\text{S1} = \text{solve}\left[\kappa^2 == \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{i\omega\mu\sigma}{1 - i\omega\tau}, \kappa\right]$$

$$\left\{\left\{\kappa \rightarrow -\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{i\mu\sigma\omega}{1 - i\tau\omega}}\right\}, \left\{\kappa \rightarrow \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{i\mu\sigma\omega}{1 - i\tau\omega}}\right\}\right\}$$

Aquí podemos controlar el orden de la aproximación, el caso de primera orden es el más usado en los libros.

$$\text{series}\left[\text{sqrt}\left[\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{i\mu\sigma\omega}{1 - i\tau\omega}\right], \{\omega, 0, 1\}\right]$$

$$\sqrt{i\mu\sigma}\sqrt{\omega} + O[\omega]^{3/2}$$

En el caso de órdenes mayores vale la pena simplificar un poco

```
FullSimplify[ $\sqrt{i \mu \sigma} \sqrt{\omega}$ ,  $\omega > 0 \ \&\& \ \tau > 0 \ \&\& \ \mu > 0 \ \&\& \ c > 0$ ]
```

$$\sqrt{i \mu \sigma \omega}$$

Como  $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$  si ponemos  $\kappa = k + i\alpha$  obtenemos  $k = \alpha$  y definimos la densidad de penetración  $\delta = 1/\alpha = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu}}$ , usando el índice de refracción complejo:

```
Apart[N2 =  $\frac{c^2}{\omega^2} \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{i \mu \sigma \omega}{1 - i \tau \omega}} \right)^2$ ]
```

$$1 + \frac{i c^2 \mu \sigma}{\omega} - \frac{i c^2 \mu \sigma \tau}{i + \tau \omega}$$

El denominador del tercer término acostumbra llamarse frecuencia de plasma así:  $\omega_p = \sqrt{\frac{\mu \sigma c^2}{\tau}}$  de forma que  $\mathcal{N}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}}$

El modelo de Drude a pesar que funciona relativamente mal para sólidos es muy acertado para plasmas prevé por ejemplo que debe producirse un fenómeno de resonancia cerca de una longitud de onda de 212 m para ondas de radio propagándose en una atmósfera de electrones y en el campo magnético de la tierra . El modelo de Drude sin embargo no afirma nada sobre las propiedades estadísticas de los electrones.

```
N[SpeedOfLight/(212Meter), 2]
```

$$\frac{1.4 \times 10^6}{\text{Second}}$$

## Las ondas largas de 60KH

La propagación atmosférica radio atmospheric abreviado sferics estudia las ondas ELF 3-3000 Hz y las VLF 3-30 kHz. La parte compleja del índice de refracción hace que las VLF se difracten en el sferics.

$$N[\text{SpeedOfLight} / (60000 / \text{Second}), 2]$$

$$5.0 \times 10^3 \text{ Meter}$$

Propagación de onda larga. VLF y ELF  
(very low frequency y extremely low frequency)

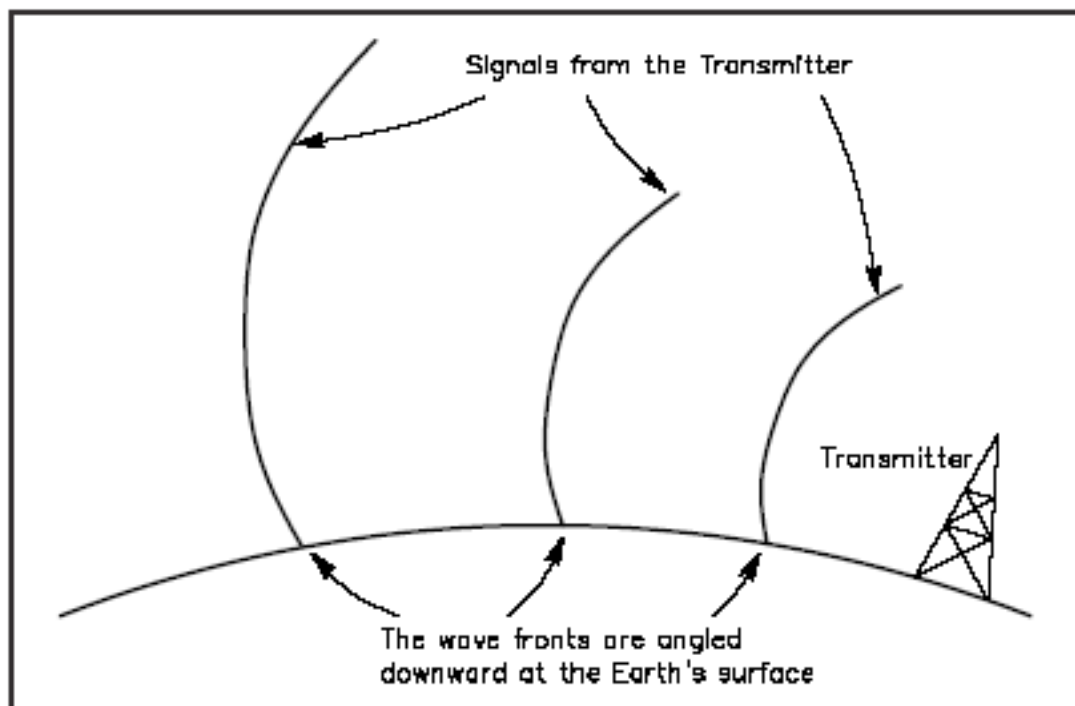
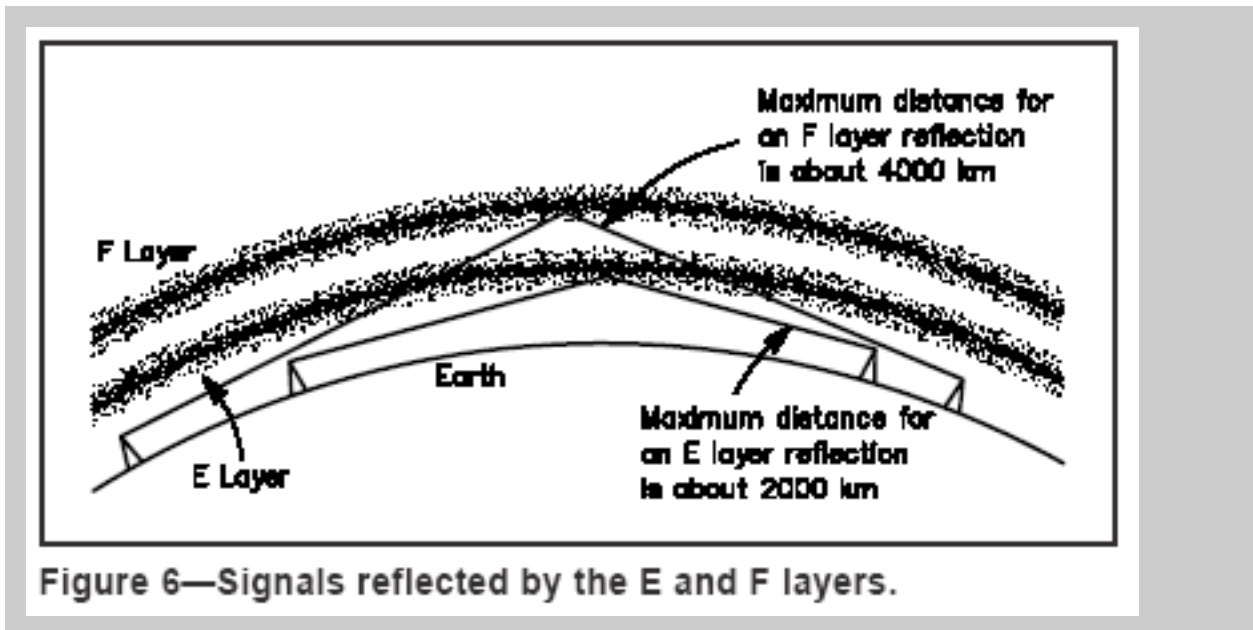


Figure 4—A ground-wave signal.

### Propagación de ondas corta



---

<http://www.boulder.nist.gov/timefreq/stations/wwvb.htm> ver los mapas de cobertura.

*El modelo de Sommerfeld y los parámetros constitutivos del plasma*

---

Cuando una onda electromagnética pasa a través de un plasma solamente se considera la interacción entre la onda y los electrones libres. Luego desde el punto de vista estadístico el estado macroscópico del plasma se puede describir en términos de una única distribución  $f(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t)$  que determina el número probable de electrones que en un tiempo  $t$ , están en un volumen  $dx dy dz$  centrado en  $\mathbf{r}$  y tienen velocidades  $dw_x dw_y dw_z$  centrado en  $\mathbf{w}$ . La función de distribución debe satisfacer la ecuación cinética o de Boltzmann

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{w} \circ \nabla f + \left( \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right) \circ \nabla_{\mathbf{w}} f = C$$

donde  $\nabla_{\mathbf{w}} f$  es el gradiente en el espacio de velocidades,  $\nabla f$  es el gradiente en el espacio de coordenadas y  $C$  es la tasa temporal de cambio causada por las colisiones.

---

La aceleración  $\frac{d\mathbf{w}}{dt}$  está relacionada con  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  de la onda por la ecuación de Lorentz

$$m \frac{d\mathbf{w}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{B})$$

las dos ecuaciones se pueden resumir en una así:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{w} \circ \nabla f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{B}) \circ \nabla_{\mathbf{w}} f = C$$

esta ecuación muestra que las fuerzas electromagnéticas macroscópicas inciden en la densidad del plasma. Integrando sobre todas las velocidades se obtiene la ecuación macroscópica de movimiento.

$$n m \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \circ \nabla \mathbf{v} \right) = nq (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) - \nabla \circ \mathbf{S} + \mathbf{G}$$

---

donde las variables macroscópicas tienen los significados siguientes

$n$  la densidad de partículas

$$n(\mathbf{r}, t) = \int \int \int f(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t) d w_x d w_y d w_z$$

$\mathbf{v}$  la velocidad macroscópica

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},t)=\int\int\int\mathbf{w}f(\mathbf{r},\mathbf{w},t)d\mathbf{w}_xd\mathbf{w}_yd\mathbf{w}_z$$

El tensor de esfuerzos

$$\mathbf{S}=\mathbf{m}\int\int\int(\mathbf{w}-\mathbf{v})(\mathbf{w}-\mathbf{v})f(\mathbf{r},\mathbf{w},t)d\mathbf{w}_xd\mathbf{w}_yd\mathbf{w}_z$$

y  $\mathbf{G}$  es el momento neto ganado debido a colisiones.

En el caso más sencillo donde sólo tenemos una onda electromagnética en el plasma la ecuación de movimiento del estado estacionario puede reducirse a:

$$-i\omega n\mathbf{m}\mathbf{v}=\mathbf{n}q\mathbf{E}+\mathbf{G}$$

todavía más como  $\mathbf{G}$  es el momento neto ganado por unidad de volumen por unidad de tiempo podemos escribir:

$$\mathbf{G}=-\mathbf{n}m\mathbf{v}\omega_{\text{eff}}$$

donde  $\omega_{\text{eff}}$  es la frecuencia de colisión y mide el número de colisiones efectivas que un electrón hace por unidad de tiempo. Usando la corriente electrónica y la frecuencia de plasma tenemos:

$$\mathbf{J}=\mathbf{n}q\mathbf{v}$$

$$(\omega^2)_p=\frac{nq^2}{m\epsilon_0} \quad (\text{usando } c^2=\frac{1}{\mu\epsilon} \text{ demuestre que esta fórmula es la misma que la de arriba})$$

sustituyendo en la ecuación del movimiento obtenemos

$$\mathbf{J}=\frac{\epsilon_0\omega_p^2}{-i\omega+\omega_{\text{eff}}}\mathbf{E}=\frac{\epsilon_0\omega_{\text{eff}}(\omega^2)_p}{\omega^2+(\omega^2)_{\text{eff}}}\mathbf{E}+i\omega\frac{\epsilon_0\omega_p^2}{\omega^2+(\omega^2)_{\text{eff}}}\mathbf{E}$$

como  $i\omega\mathbf{P}=i\omega\chi_e\mathbf{E}$  obtenemos para

$$\sigma=\frac{\epsilon_0\omega_{\text{eff}}(\omega^2)_p}{\omega^2+(\omega^2)_{\text{eff}}}$$

$$\epsilon=\epsilon_0\left(1-\frac{\epsilon_0\omega_p^2}{\omega^2+(\omega^2)_{\text{eff}}}\right)$$

La solución general de la ecuación de transporte con campos autoconsistentes se denomina ecuación de Vlasov-Meaxwell, si nos restringimos a plasmas universo de campo libre, la ecuación se escribe como:

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\mathbf{v}\circ\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}+\frac{q}{m}\mathbf{E}\circ\frac{\partial n}{\partial \mathbf{v}}=0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\circ\mathbf{E}=4\pi q\int[n(\mathbf{r},\mathbf{v},t)-n_0(\mathbf{v})]dV$$

en esta ecuación como no hay termino de colisión no tenemos la solución asintótica como es el caso de Boltzmann o Fokker-Planck.

La solución en serie de esta ecuación fue tratada por primera vez de forma independiente por Landau y después por Van Kampen que utilizó lo que se llama el modo normal.

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n_0(\mathbf{v}) + n_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

siendo que las perturbaciones se dicen de vector de onda

$$n_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n_1(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

así se encuentra la ecuación transformada de Vlasov la longitud de Debye

$$\lambda_0 = \left( \frac{k_B T}{ne^2} \right) \text{ y el amortiguamiento de Landau}$$

$$E_1(\mathbf{k}, t) \simeq R_0 e^{-\gamma t} \text{Cos}(\omega_0 t + \alpha)$$

---

Áreas de la ionósfera de la tierra

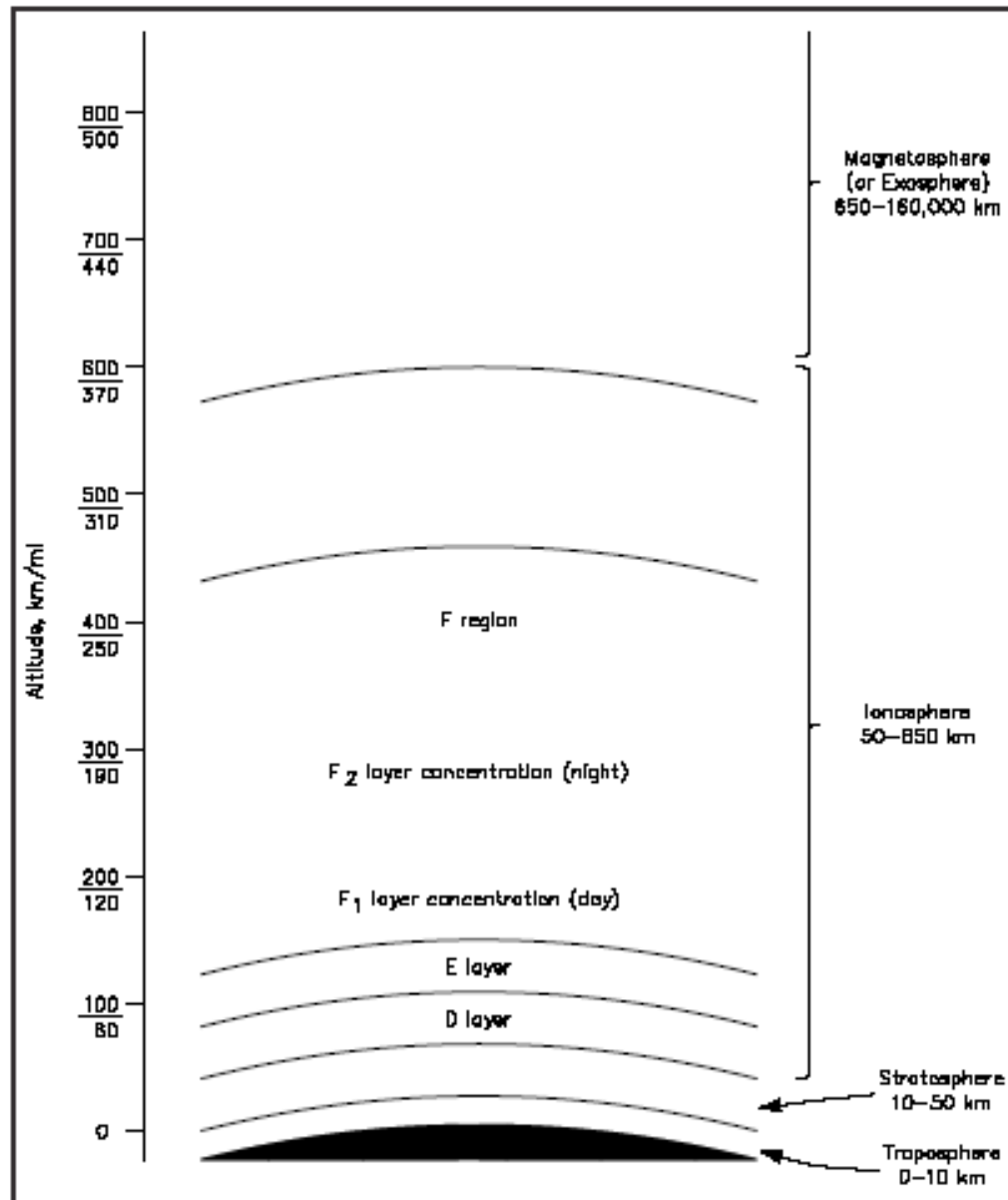
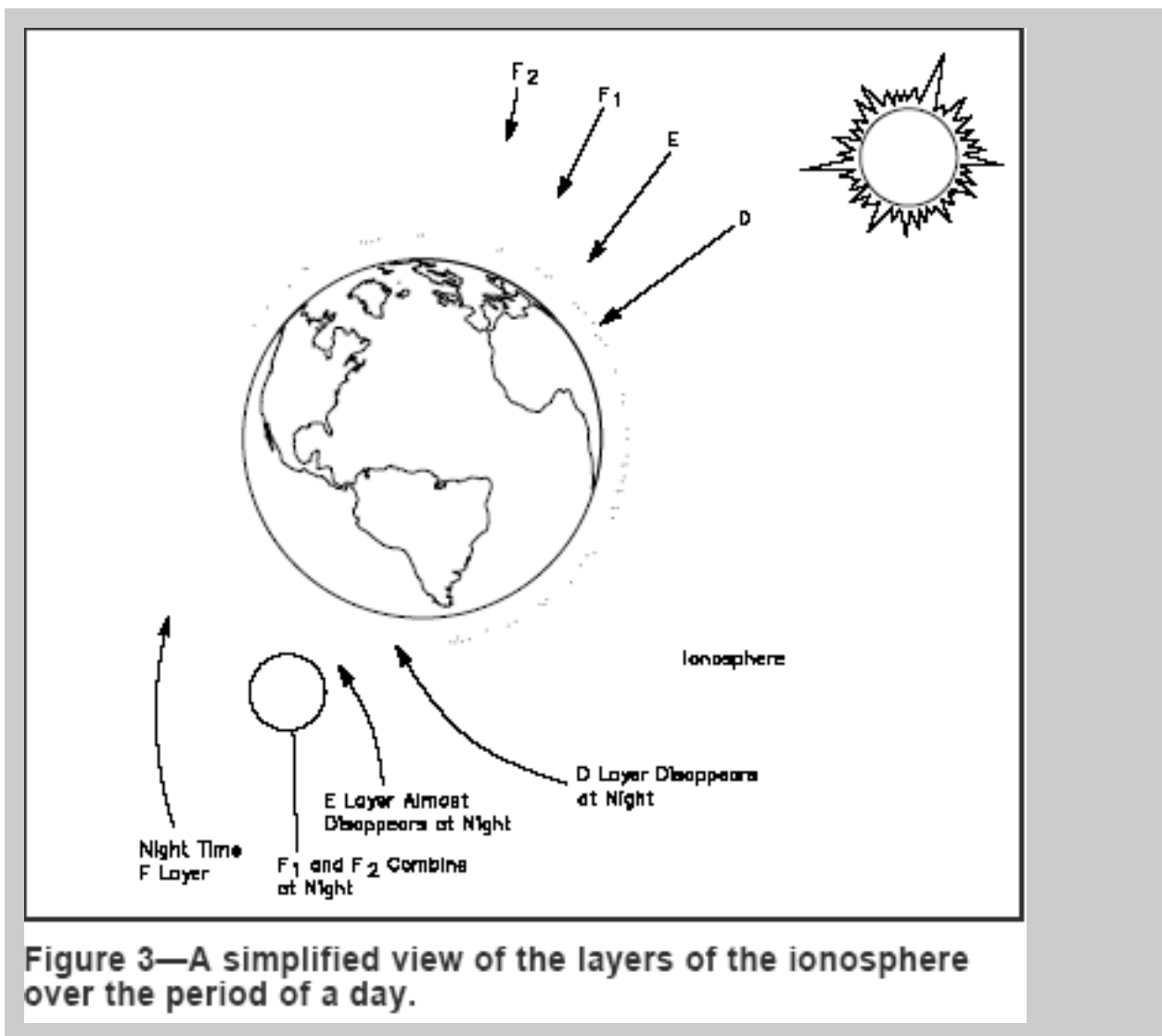


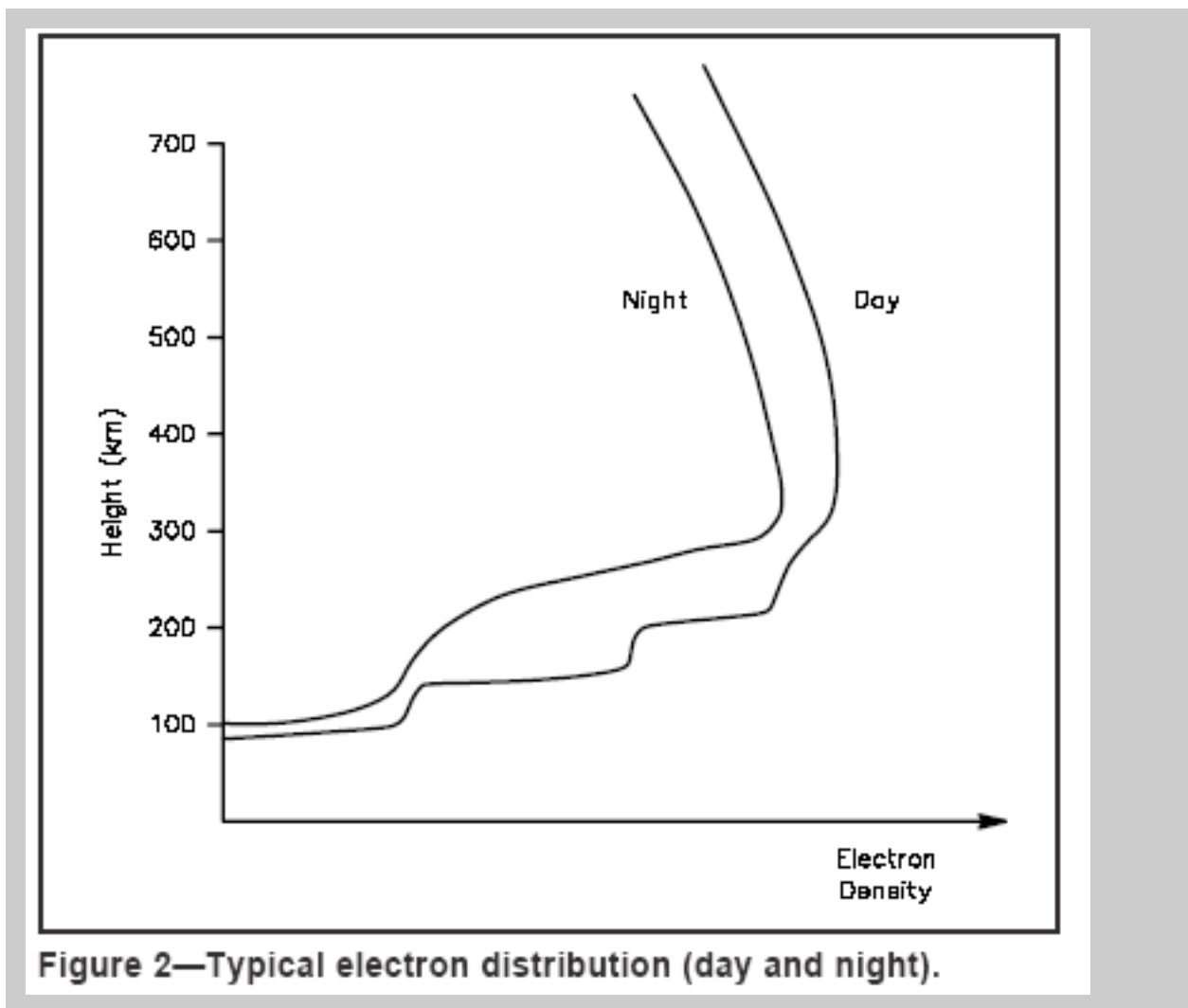
Figure 1—Areas of the atmosphere.

Reprinted with permission of ARRL from November, 1999

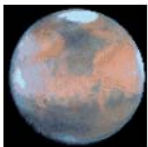
## Variaciones diarias de la ionósfera terrestre



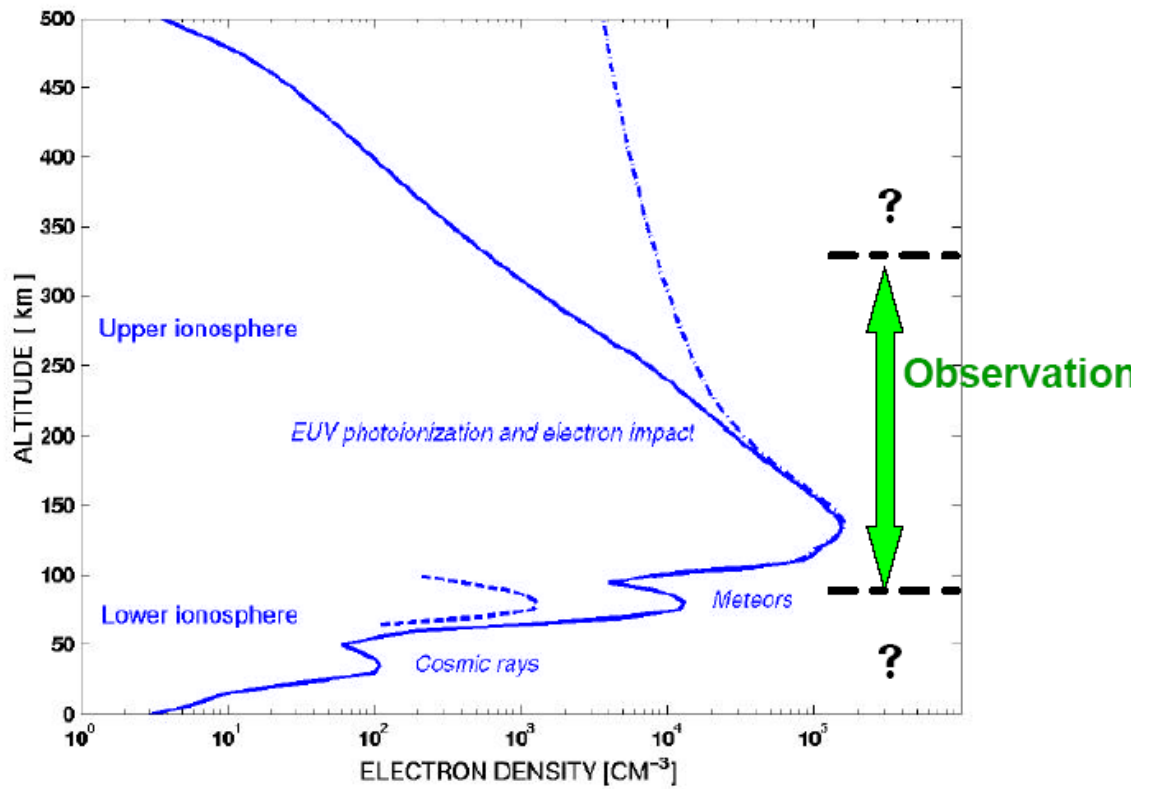
## Densidad electrónica en la atmosfera terrestre



## Densidad electrónica en la atmósfera de Marte



Generalities on the atmosphere of Mars  
95 % CO<sub>2</sub>, T=120 K at 100 km



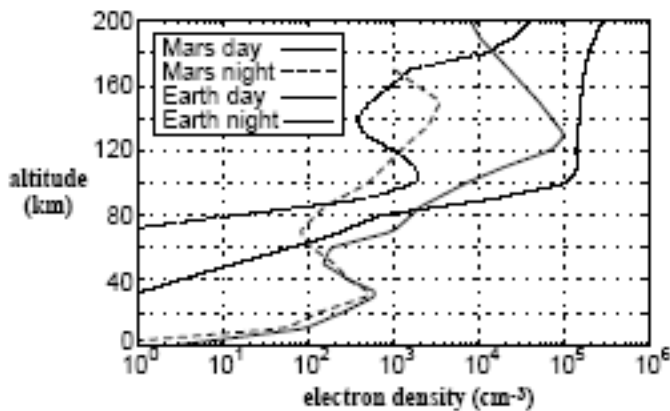


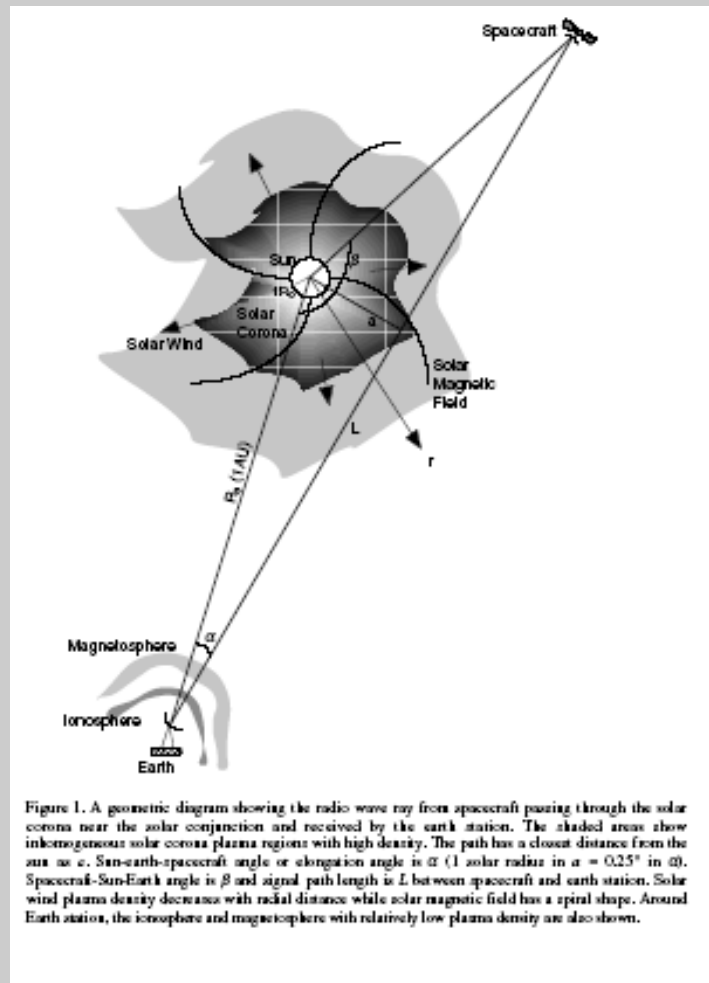
Figure 2. Martian and terrestrial electron density profiles for day and night.

## How to detect this ionospheric layer ?

*At these altitudes, the atmosphere is difficult to probe*

- **Radio occultation** method (Mars Express in 2004-2006)
- Ionospheric **sounder** (NetLander in 2008-2010?)
- **UV observations** by Spicam and Nozomi (2004-2006)
- Observations of meteors in the **visible** range with a **micro-camera** (2010..?)
- **ELF/VLF** signature of meteors (NetLander?)

## Estudio de la propagación en la corona solar



**1. Introduction:** The solar corona and solar wind are high density and strongly turbulent ionized gases erupted from the Sun in comparison with the Earth's ionosphere. When RF waves pass through the ionized gas regions as shown in Figure 1, the signals cause strong scintillation at their amplitude, frequency and phase, especially in the regions very close to the Sun (less than 4 solar radius). These effects will severely degrade the telecommunication links and even make it impossible [1,2,3,4]. Recent solar corona conjunction experiments for the first time made it available to detect these scintillation effects at S, X and Ka bands [5,6,7,8,9]. This study briefly summarizes the primary effects of the solar corona and solar wind on telecommunications parameters as related to the DSN (Deep Space Network) at S (2.3 GHz), X (8.4 GHz) and Ka (32 GHz) band radio signals passing through the solar corona and solar wind. It allows the telecommunications engineer to predict radio metric and radio science data performance of signals.

---

**En conclusión podemos decir que supliendo un poco los conocimientos adquiridos en las clases de eelctromagnetismo básico podemos entender la propagación atmosférica, con un poco de teoría de transporte y el uso de antenas y receptores para wwvb (60kHz) podemos hacer investigación de sferics en la tierra, por ejemplo la relación de las tormentas en el Golfo de Mexico y la recepción de wwvb en Honduras en el modelo de conducción en la tropósfera. Los modelos de propagación tridimensional tienen que esperar hasta el desarrollo de clusters en Honduras o la llegada del grid.**

■ **Bibliografía**

- 1) **Electrodinamica, Carlos Garcia Canal, Editorial Alianza**
- 2) **Teoría del transporte, James J. Duderstadt CECSA**
- 3) **Theory of electromagnetic wave progapation, Charles Papas, Dover**
- 4) **Radio atmospherics propagation on Mars, Steven Cummer Jpurnal of 4)Geophysical Research 104, 149-14,157, june 25,1999**
- 6) **Scintillation effects on radio wave propagation through the solar corona C M Ho**
- 7) **Jet Propulsion Laboratory, Internal Report**
- 8) **Radio Wave and the Ionosphere, Ian Poole, G3YWX**
- 9) **<http://www.boulder.nist.gov/timefreq/stations/wwvb.htm>**
- 10) **[http://en.wikipedia.org/wiki/Radio\\_propagation](http://en.wikipedia.org/wiki/Radio_propagation)**
- 11) **The mars express radar, Pesnell y Grebowsky, Conferencia. Tegucigalpa, Noviembre 14, 2003**